Analiza matematyczna 1
Lista 5

Z. 1. Zbadać jednostajną zbieżność ciągu funkcyjnego $(f_n)_{n\in N}$ o wzorze: (po 3 p.)

a) $f_n(x) = x^n, \quad gdzie\ x \in [0, \frac{1}{2}]$,

b) $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$, gdzie $x \in [0,1]$,

c) $f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}$, gdzie $x \in R$,

d) $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$, gdzie $x \in [0,2]$,

e) $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$, gdzie $x \in R$,

f) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$, gdzie $x \in R$,

g) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$, gdzie $x \in R$,

h) $f_n(x) = \sin\frac{x}{n}$, gdzie $x \in R$,

i) $f_n(x) = arctg(x-n)$, gdzie $x \in R$,

j) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}, \quad gdzie\ x \in [0,1]$,

k) $f_n(x) = x^n - x^{2n}, \quad gdzie\ x \in [0,1]$,

l) $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$, gdzie $x \in [0,\infty)$.

Z. 2. Wyznaczyć obszar zbieżności podanych szeregów funkcyjnych oraz znaleźć ich sumy :

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(x+1)^n$, b) $\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nx}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^n - x^{n+1}\right)$.

(po 3 p.)

Z. 3. Zbadać zbieżność jednostajną podanych szeregów funkcyjnych: (po 2 p.)

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2}$, gdzie $x \in R$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$, gdzie $x \in [0.\infty)$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$, gdzie $x \in R$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^2}{(x^2+1)3^n}$, gdzie $x \in R$,

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}$, gdzie $x \in R$,

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$, gdzie $x \in R$,

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$, gdzie $x \in [-1,1]$,

h) $\sum_{n=1}^{\infty}x^n$, gdzie $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$,

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}$, gdzie $x \in R$,

j) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$, gdzie $x \in (0,\infty)$.

Z.4. Uzasadnić, że sumy podanych szeregów funkcyjnych są funkcjami ciągłymi na wskazanych przedziałach : (po 2 p.)

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x}$, gdzie $x \in [0.\infty)$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, gdzie $x \in [0,10]$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{5^n}$, gdzie $x \in R$.

Z.5. Wyznaczyć środek x_0 szeregu potęgowego, wyznaczyć jego promień zbieżności R i zbadać zbieżność w końcach x_0 - R i $x_0 + R$ jego przedziału zbieżności $(x_0 - R, x_0 + R)$ w przypadku gdy liczba R jest skończona. (po 3 p.)

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^n$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (x-2)^n$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$,

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^n} x^n$,

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(n+2)!}{(2n)!} x^n$,

g) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (4-x)^n$,

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(6-3x)^n}{3^n + 2^n}$,

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(5 - 3\sin\frac{n\pi}{3}\right)^n}{n} x^n$.